Title	BANACH環の多項式のノルムを保存する写像の構造 (バナッハ空間及び関数空間論の最近の進展とその応用)
Author(s)	新藤, 瑠美
Citation	数理解析研究所講究録 (2008), 1615: 1-5
Issue Date	2008-10
URL	http://hdl.handle.net/2433/140141
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第1615巻 2008年 1-5

BANACH環の多項式のノルムを保存する写像の構造

新潟大学大学院・自然科学研究科　新藤瑠美 (Rumi Shindo)
Graduate School of Science and Technology,
Niigata University

1. 始めに

本内容は山形大学の三浦毅先生と新潟大学博士課程を修了された本間大さんとの共同研究 [4] である．まずはじめに次を定義する．

定義 1. $\mathcal{A}$ を単位的可換 *Banach* 環とする．$\mathcal{A}$ が *semi-simple* であるとは $\mathcal{A}$ の *Gelfand* 変換が単射であることである．$\mathcal{A}$ の任意の元 f に対して f のスペクトルとスペクトル半径を以下のように定義する．

$$\sigma(f) = \{\lambda : \lambda\text{は複素数でかつ}, f - \lambda\text{は可逆でない}\}$$

$$\mathrm{r}(f) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(f)\}$$

例 1. *compact Hausdorff* 空間 X 上の複素数値連続関数全体を $C(X)$ とする．$C(X)$ 上に通常の和，スカラー倍に加えて積とノルムを以下のように定義すると $C(X)$ は *semi-simple* な単位的可換 *Banach* 環である．

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \quad (f, g \in C(X))$$

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\} \quad (f \in C(X))$$

この場合，$\sigma(f) = f(X)$，$\mathrm{r}(f) = \|f\|_\infty$ $(f \in C(X))$ である．

以下では，$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ を単位的可換 Banach 環とする．更に $\mathcal{A}$ は semi-simple であると仮定する．

定義 2. $*$ が $\mathcal{A}$ 上の *involution* であるとは，写像 $*; \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ が以下をみたすことである．
(1) $f^{**} = f \quad (f \in \mathcal{A})$
(2) 任意の複素数 λ, μ に対して $(\lambda f + \mu g)^* = \overline{\lambda} f^* + \overline{\mu} g^* \quad (f, g \in \mathcal{A})$
(3) $(fg)^* = f^* g^* \quad (f, g \in \mathcal{A})$

更に $\hat{\ }$ を *Gelfand* 変換とする．$\mathcal{A}$ 上の *involution* $*$ に対して $\widehat{f^*} = \overline{\widehat{f}} \quad (f \in \mathcal{A})$ が成り立つとき，$*$ は *symmetric* であると言う．

例 2. $C(X)$ 上の複素共役 $\bar{\ }$ は *symmetric involution* である．

Molnár [5] は第一可算公理をみたす compact Hausdorff 空間 X 上の複素数値連続関数全体からなる Banach 環 $C(X)$ 上の写像について以下の定理を示した．

定理 1. (*Molnár* [5]) T を $C(X)$ から $C(X)$ への上への写像とする。

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 46J10, 47B48; Secondary 46H40, 46J20.
Key words and phrases. Banach algebra, uniform algebra, norm-preserving.

(1) $C(X)$ の任意の元 f,g について

$$\sigma(T(f)T(g))=\sigma(fg)$$

が成り立つとき，$T(1)^{-1}T$ は多元環としての同形写像である．

(2) $C(X)$ の任意の元 f,g について

$$\sigma(T(f)\overline{T(g)})=\sigma(f\overline{g})$$

が成り立つとき，$T(1)^{-1}T$ は多元環としての同形写像である．

その後，Hatori, Miura and Takagi は $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 間の写像について次の結果を示した．彼らの結果は定理 1 の一般化となっている．

定理 2. (*Hatori, Miura and Takagi*) T を $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への上への写像とする．

(1) [2, Theorem 7.4] ある 0 でない複素数 α が存在して，$\mathcal{A}$ の任意の元 f,g について

$$\mathrm{r}(T(f)T(g)-\alpha)=\mathrm{r}(fg-\alpha)$$

が成り立つとき，$\mathcal{B}$ は *semi-simple* で $T(1)^{-1}T$ は実多元環としての同形写像である．

(2) [3, Thoerem 6.2] $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ がそれぞれ *symmetric involutions* $*$ と $\star$ を持つとする．$\mathcal{A}$ の任意の元 f,g について

$$\sigma(T(f)T(g)^{\star})=\sigma(fg^{*})$$

が成り立つとき，$\mathcal{B}$ は *semi-simple* で $T(1)^{-1}T$ は多元環としての同形写像である．

ここで，任意の 0 でない複素数 α に対して，次が成り立つ．

$$\sigma(f)=\sigma(g)\Leftrightarrow\sigma(f-\alpha)=\sigma(g-\alpha)\Rightarrow\mathrm{r}(f-\alpha)=\mathrm{r}(g-\alpha)\quad(f,g\in\mathcal{A})$$

また，次の例からわかるように，定理 2 (1) の条件は，定理 1(1) の条件の十分条件ではない．

例 3. $C([0,1])$ から $C([0,1])$ への上への写像 T_1,T_2 を

$$T_1(f)(x)=f(1-x),\quad T_2(f)(x)=\overline{f(x)}\quad(x\in[0,1])$$

と定義する．すると T_1 は

$$\sigma(T_1(f)T_1(g))=\sigma(fg),\quad\sigma(T_1(f)\overline{T_1(g)})=\sigma(f\overline{g})$$

が任意の $f,g\in C([0,1])$ に対して成り立つ．一方 T_2 では成り立たない．しかし

$$\mathrm{r}(T_2(f)T_2(g)-1)=\mathrm{r}(fg-1),\quad\mathrm{r}(T_2(f)\overline{T_2(g)}-1)=\mathrm{r}(f\overline{g}-1)$$

は任意の $f,g\in C([0,1]))$ に対して成り立つ．

一方，定理 1 (2)，定理 2 (2) をスペクトル半径によって一般化した結果は示されていなかった．この点に関して，今回我々は以下の定理を得た．

定理 3. (*Miura, Honma and S.* [4, Thoerem 3.4]) $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ がそれぞれ *involutions* $*$ と $\star$ を持つとする．ここで，*involutions* $*,\star$ には *symmetricity* を仮定していない．T を $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への上への写像とする．ある 0 でない複素数 α が存在して，$\mathcal{A}$ の任意の元 f,g について

$$\mathrm{r}(T(f)T(g)^{\star}-\alpha)=\mathrm{r}(fg^{*}-\alpha)$$

が成り立つとき，$\mathcal{B}$ は *semi-simple* で $T(1)^{-1}T$ は実多元環としての同形写像である．

定理 3 では，定理 1 (2)，定理 2 (2) のスペクトル半径による一般化に加えて更に involutions の symmetricity の条件も外すことができた．本内容ではこの結果の略証を述べる．

2. 定理の略証

まず関数環について，次の定理が成り立つことを示す.

補助定理 4. (*Miura, Honma and S.* [4, Thoerem 3.1]) A, B を X, Y 上の関数環，A^{-1}, B^{-1} を A, B の可逆元全体からなる部分群とする．T を A^{-1} から B^{-1} への上への写像とする．ある 0 でない複素数 α が存在して，A^{-1} の任意の元 f, g に対して

$$\left\|T(f)T(g)^{-1} - \alpha\right\|_\infty = \left\|fg^{-1} - \alpha\right\|_\infty$$

が成り立つとき，B の *Choquet* 境界 $\mathrm{Ch}(B)$ から A の *Choquet* 境界 $\mathrm{Ch}(A)$ への同相写像 ϕ と $\mathrm{Ch}(B)$ の *clopen set* K が存在し，

$$T(f) = T(1) \times \begin{cases} f \circ \phi & on\ K \\ \overline{f \circ \phi} & on\ \mathrm{Ch}(B) \setminus K \end{cases} \quad (f \in A^{-1})$$

が成り立つ.

(**補助定理 4 の略証**) A^{-1} の任意の元 f, g に対して

$$\left\|T(\alpha f)T(f)^{-1} - \alpha\right\|_\infty = \left\|\alpha f f^{-1} - \alpha\right\|_\infty = 0$$

より $T(\alpha f) = \alpha T(f)$ がわかり，

$$\left\|T(f)T(g)^{-1} - 1\right\|_\infty = \left\|fg^{-1} - 1\right\|_\infty$$

が成り立つ．$T' = T(1)^{-1}T$ と定義すると，T' は A^{-1} から B^{-1} への上への写像で

$$\left\|T'(f)T'(g)^{-1} - 1\right\|_\infty = \left\|fg^{-1} - 1\right\|_\infty$$

が任意の $f, g \in A^{-1}$ について成り立つ．よって以下，$T(1) = 1$ と仮定する．証明を始めるにあたり，以下を定義する．任意の $f \in A$ に対して

$$\sigma_\pi(f) = \{\lambda \in \sigma(f) : |\lambda| = \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(f)\}\}$$

とする。$\sigma_\pi(f)$ は f の末梢スペクトルといい，$\sigma(f)$ の部分集合である．B の Choquet 境界 $\mathrm{Ch}(B)$ の任意の元 t に対して

$$P_{B^{-1}}(t) = \{u \in B^{-1} : \sigma_\pi(u) = \{1\}, u(t) = 1\}$$
$$W_t = \{f \in B^{-1} : |f(t)| = 1 = \|f\|\}$$

とすると，$P_{B^{-1}}(t)$ は空でない W_t の部分集合である．まず，以下簡単に $\mathrm{Ch}(B)$ から $\mathrm{Ch}(A)$ への同相写像 ϕ の構成法を述べる．$\mathrm{Ch}(B)$ の任意の元 y に対して $\cap_{f \in T^{-1}(W_y)} |f|^{-1}(1)$ は単集合でその唯一つの元を x_y と表すことにする．ここで $\phi(y) \stackrel{def}{=} x_y$ と定義する．この ϕ は全単射で任意の $f \in A^{-1}$ と $y \in \mathrm{Ch}(B)$ に対して

$$|T(f)(y)| = |f(\phi(y))|$$

が成り立つ．そこから更に ϕ が同相写像であることがわかる．

以下 $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ とする．任意の $\beta \in S^1$ に対して，$\|T(\beta)T(1)^{-1} - 1\|_\infty = |\beta - 1|$ がわかる．これを用いて $P_{B^{-1}}(y) \subset T(P_{A^{-1}}(\phi(y)))$ が導かれ，更に $T(-1) = -1$ が成り立つ．これを用いて

$$\|T(\beta) + 1\|_\infty = \left\|T(\beta)T(-1)^{-1} - 1\right\|_\infty = \|-\beta - 1\|_\infty = |\beta + 1|$$

であるから，$|T(\beta)| = |\beta| = 1$，$\|T(\beta) - 1\| = |\beta - 1|$ とあわせて $T^{-1}(\beta)(\mathrm{Ch}(B)) = \{\beta, \overline{\beta}\}$ であることがわかる．これより $T(i)P_{B^{-1}}(y) \subset T(iP_{A^{-1}}(\phi(y)))$ で，$\mathrm{Ch}(B)$ 上で $T(-i) = -T(i)$ を得る．ここで

$$K = \{y \in \mathrm{Ch}(B) : T(i)(y) = i\}$$

と定義すると，K は clopen set で任意の $\beta \in S^1$ に対して

$$T(\beta) = \begin{cases} \beta & \text{on } K \\ \overline{\beta} & \text{on } \mathrm{Ch}(B) \setminus K \end{cases}$$

が成り立つ．これを用いて任意の $y \in \mathrm{Ch}(B)$，$\beta \in S^1$ に対して

$$T(\beta)P_{B^{-1}}(y) \subset T(\beta P_{A^{-1}}(\phi(y)))$$

が示される．

任意の $f \in A^{-1}$，$y \in \mathrm{Ch}(B)$ をとり固定する．clopen set K または $\mathrm{Ch}(B) \setminus K$ で y が含まれる方を F とする．$\beta \in S^1$ を特に $\beta = -f(\phi(y))|T(f)(y)|^{-1}$ とする．Bishop の定理 [1, Theorem 2.4.1] より

$$\sigma_\pi(UT(f)^{-1}) = \{T(f)(y)^{-1}\}, \quad |UT(f)^{-1}| < |T(f)(y)|^{-1} \text{ on } \mathrm{Ch}(B) \setminus F$$

をみたすある $P_{B^{-1}}(y)$ の元 U が存在することがわかる．$T(\beta)P_{B^{-1}}(y) \subset T(\beta P_{A^{-1}}(\phi(y)))$ から $T(\beta u) = T(\beta)U$ となる $P_{A^{-1}}(\phi(y))$ の元 u が存在する．これを用いて

$$\left\|T(\beta)UT(f)^{-1} - 1\right\|_\infty = \left\|T(\beta u)T(f)^{-1} - 1\right\|_\infty = \left\|\beta u f^{-1} - 1\right\|_\infty \geq |T(f)(y)|^{-1} + 1$$

$$\left\|T(\beta)UT(f)^{-1}\right\|_\infty \leq |T(\beta)| \left\|UT(f)^{-1}\right\|_\infty = |T(f)(y)|^{-1}$$

が導かれる．よって $(T(\beta)UT(f)^{-1})(y_0) = -|T(f)(y)|^{-1}$ となる $y_0 \in Y$ が存在する．U の条件より，

$$(UT(f)^{-1})(y_0) = T(f)(y)^{-1}, \quad T(\beta)(y_0) = T(\beta)(y)$$

である．以上より

$$-\frac{1}{|T(f)(y)|} = \frac{T(\beta)U}{T(f)}(y_0) = T(\beta)(y_0)\frac{U}{T(f)}(y_0) = T(\beta)(y)\frac{1}{T(f)(y)}$$

が成り立つ．従って

$$T(\beta) = \begin{cases} \beta & \text{on } K \\ \overline{\beta} & \text{on } \mathrm{Ch}(B) \setminus K \end{cases}$$

より，結論を得る．　□

この結果を用いて定理 3 を証明する．

(**定理 3 の略証**) まず，$\mathcal{B}$ は semi-simple とする．$\mathcal{A}^{-1}, \mathcal{B}^{-1}$ を $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ の可逆元全体からなる部分群とする．任意の $f \in \mathcal{A}^{-1}$ について $g = (\alpha f^{-1})^*$ とすると，

$$\mathrm{r}(T(f)T((\alpha f^{-1})^*)^* - \alpha) = \mathrm{r}(f\alpha f^{-1} - \alpha) = 0$$

より $T(\mathcal{A}^{-1}) = \mathcal{B}^{-1}$ で更に $T((\alpha f^{-1})^*)^* = \alpha T(f)^{-1}$ を得る．したがって

$$\begin{aligned} \mathrm{r}(T(f)T(g)^{-1} - 1) &= |\alpha|^{-1}\mathrm{r}(T(f)\alpha T(g)^{-1} - \alpha) = |\alpha|^{-1}\mathrm{r}(T(f)T((\alpha g^{-1})^*)^* - \alpha) \\ &= |\alpha|^{-1}\mathrm{r}(f((\alpha g^{-1})^*)^* - \alpha) = \mathrm{r}(fg^{-1} - 1) \end{aligned}$$

が任意の $f \in \mathcal{A}, g \in \mathcal{A}^{-1}$ に対して成り立つ．$M_\mathcal{A}$ を $\mathcal{A}$ の極大イデアル空間とする．$\mathrm{r}(f) = \|\widehat{f}\|_{\infty(M_\mathcal{A})}$　$(f \in \mathcal{A})$ より，

$$\|\widehat{T(f)}\widehat{T(g)}^{-1} - 1\|_{\infty(M_\mathcal{B})} = \|\widehat{f}\widehat{g}^{-1} - 1\|_{\infty(M_\mathcal{A})} \quad (f \in \mathcal{A}, g \in \mathcal{A}^{-1})$$

が成り立つ．$\mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{A}})$ を $\mathcal{A}$ の Gelfand 変換像 $\widehat{\mathcal{A}}$ の $C(M_{\mathcal{A}})$ 上の closure とする．$\mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{A}})$ は $M_{\mathcal{A}}$ 上の関数環である．$\mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{A}})^{-1}$ 上の関数 $\widetilde{T}$ を任意の $\mathfrak{f} \in \mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{A}})^{-1}$ に対して

$$\widetilde{T}(\mathfrak{f}) = \lim_{\{f_n\}\in\mathcal{A}^{-1}, f_n \to \mathfrak{f}} \widehat{T(f_n)}$$

と定義すると，$\widetilde{T}$ は well-defined で $\widetilde{T}(\mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{A}})^{-1}) = \mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{B}})^{-1}$，

$$\|\widetilde{T}(\mathfrak{f})\widetilde{T}(\mathfrak{g})^{-1} - 1\|_{\infty(M_{\mathcal{B}})} = \|\mathfrak{f}\mathfrak{g}^{-1} - 1\|_{\infty(M_{\mathcal{A}})} \quad (\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in \mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{A}})^{-1})$$

がわかる．補助定理 4 より，$\mathrm{Ch}(\mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{B}}))$ から $\mathrm{Ch}(\mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{A}}))$ への同相写像 ϕ と $\mathrm{Ch}(\mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{B}}))$ の clopen set K が存在し，

$$\widetilde{T}(\mathfrak{f}) = \widehat{T(1)} \times \begin{cases} \mathfrak{f}\circ\phi & \text{on } K \\ \overline{\mathfrak{f}\circ\phi} & \text{on } \mathrm{Ch}(\mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{B}})) \setminus K \end{cases} \quad (\mathfrak{f} \in \mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{A}})^{-1})$$

が成り立つことがわかる．

任意の $\mathfrak{f} \in \mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{A}})$ に対して，ある $\mathfrak{f}_0 \in \mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{A}})^{-1}$ と 0 でない複素数 λ_0 で $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_0 + \lambda_0$ と表せる．

$$S(\mathfrak{f}) = \widehat{T(1)}^{-1}\widetilde{T}(\mathfrak{f}_0) + \widehat{T(1)}^{-1}\widetilde{T}(\lambda_0)$$

と定義すると，

$$S(\mathfrak{f}) = \begin{cases} \mathfrak{f}\circ\phi & \text{on } K \\ \overline{\mathfrak{f}\circ\phi} & \text{on } \mathrm{Ch}(\mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{B}})) \setminus K \end{cases}$$

が成り立つ．これより S は $\mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{A}})$ から $\mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{B}})$ への well-defined な全単射写像である．更に

$$\left\|S(\widehat{f})S(\mathfrak{g})^{-1} - 1\right\|_{\infty(M_{\mathcal{B}})} = \left\|\widehat{T(1)}^{-1}\widehat{T(f)}S(\mathfrak{g})^{-1} - 1\right\|_{\infty(M_{\mathcal{B}})} \quad (f \in \mathcal{A}, \mathfrak{g} \in \mathrm{cl}(\widehat{\mathcal{A}})^{-1})$$

であることから $S(\widehat{f}) = \widehat{T(1)}^{-1}\widehat{T(f)}$ が任意の $f \in A$ で成り立つことがわかる．以上より，$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ は semi-simple より，$T(1)^{-1}T$ は実多元環として同形な写像である．

最後に $\mathcal{B}$ の semi-simplicity を仮定しない場合について述べる．まず，$\widehat{\mathcal{B}}$ は semi-simple 可換 Banach 環である．Γ を $\mathcal{B}$ 上の Gelfand 変換とすると，$\Gamma \circ T$ は $\mathcal{A}^{-1}$ から $\widehat{\mathcal{B}}^{-1}$ への上への写像で定理 3 の条件をみたす．前半の $\mathcal{B}$ が semi-simple の場合の結果を適用して，$\Gamma \circ T$ は全単射であることがわかる．これより $T : \mathcal{A}^{-1} \to \mathcal{B}^{-1}$ と $\Gamma|_{\mathcal{B}^{-1}} : \mathcal{B}^{-1} \to \widehat{\mathcal{B}}^{-1}$ は全単射である．更に Γ は単射である．実際，任意の $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in \mathcal{B}$ に対して $\Gamma(\mathfrak{f}) = \Gamma(\mathfrak{g})$ とする．この $\mathfrak{f}$ について，$\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_0 + \lambda_f$ となるような $\mathfrak{f}_0 \in \mathcal{B}^{-1}$ と複素数 λ_f が存在し，$\widehat{\mathfrak{f}_0} = \widehat{\mathfrak{g} - \lambda_f}$ が $M_{\mathcal{B}}$ 上で成り立つ．$\Gamma|_{\mathcal{B}^{-1}}$ は単射であるから，$\mathfrak{f}_0 = \mathfrak{g} - \lambda_f$ である．ゆえに $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_0 + \lambda_f = \mathfrak{g}$ がわかる．よって，$\mathcal{B}$ は semi-simple である． □

REFERENCES

[1] A. Browder, *Introduction to function algebras*, W.A. Benjamin, 1969.

[2] O. Hatori, T. Miura and H. Takagi, *Multiplicatively spectrum-preserving and norm-preserving maps between invertible groups of commutative Banach algebras*, (2006), preprint.

[3] O. Hatori, T. Miura and H. Takagi, *Unital and multiplicatively spectrum-preserving surjections between semi-simple commutative Banach algebras are linear and multiplicative*, J. Math. Anal. Appl., **326** (2007), 281–296.

[4] T. Miura, D. Honma and R. Shindo, *Divisibly norm-preserving maps between commutative Banach algebras*, (2008), preprint.

[5] L. Molnár, *Some characterizations of the automorphisms of $B(H)$ and $C(X)$*, Proc. Amer. Math. Soc., **130** (2001), 111–120.